LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcije 9 i 10

Elementarne funkcije.

Funkcije važne u primjenama

Lekcije iz Matematike 1.

9. i 10. Elementarne funkcije. Funkcije važne u primjenama

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se navode elementarne funkcije (tj. linearne, kvadratne, kubne funkcije i, općenito, potencije i polinomi, racionalne funkcije, eksponencijalne i logaritamske funkcije te trigonometrijske i arkus funkcije), opisuju njihova svojstva, crtaju grafovi, usvajaju pripadajuće oznake i tehnika računanja (temeljne elementarne funkcije upravo su one funkcije koje su ugradjene u kalkulator). Naznačuje se uloga tih funkcija u primjenama.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

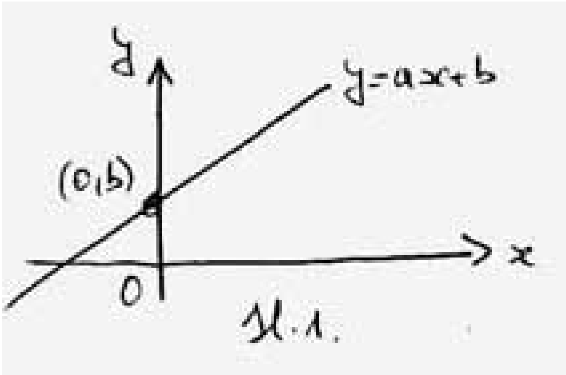
Primjena matematike dobrim je dijelom zasnovana na računanju. Računanje počiva na temeljnim računskim operacijama: zbrajanju (i njenoj inverznoj operaciji oduzimanju), množenju (i njenoj invereznoj operaciji dijeljenju). Uzastopnim množenjem broja sa sobom dolazi se do operacije potenciranja (toj je operaciji inverzna operacija korjenovanja).
U primjenama, te operacije često nisu dovoljne. Drugim riječima, postoje veze medju zavisnim veličinama koje se ne mogu (ili ne mogu jednostavno) zapisati pomoću gornjih operacija. Takve su, na primjer, eksponencijalne veze (odnosno, njima inverzne, logaritamske veze). Na primjer, eksponencijalnog je tipa veza izmedju količine radioaktivne materije i proteklog vremena.
Takodjer, za opis veze izmedju položaja točke koja titra na pravcu i proteklog vremena, potrebne su trigonometrijske funkcije (njihove inverzne funkcije zovu se arkus funkcijama).

III. Potrebno predznanje

Pojam funkcije i grafa funkcije. To su pojmovi koji se obradjuje već u osnovnoj i u srednjoj školi, a mi smo ih ponovili u prethodnoj lekciji. Takodjer, u srednjoj je školi obradjivana linearna, kvadratna, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije i polinomi, medjutim mi ćemo sve to opet ponoviti. Jedino zaista novo gradivo jesu arkus funkcije.

Linearna funkcija - linearna veza medju veličinama.

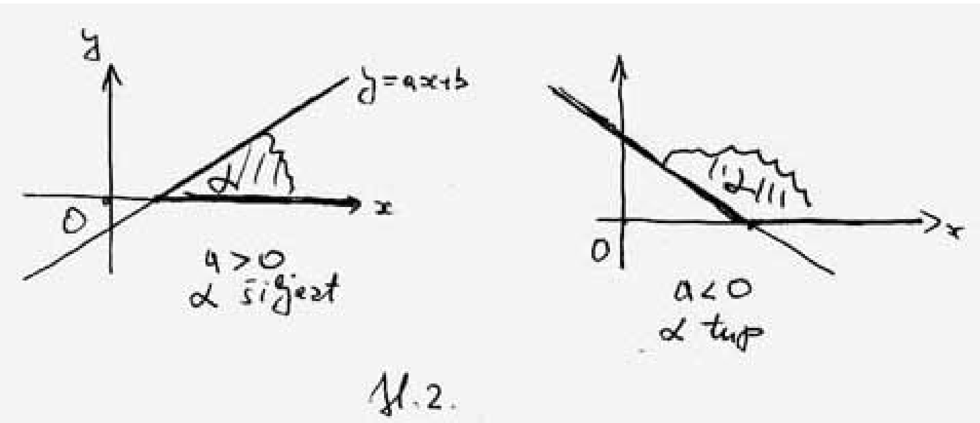
Funkcija: $f(x) := ax + b$
Jednadžba grafa (linearna veza medju veličinama): $y = ax + b$ (sl.1.).



Parametri o kojima ovisi f (odnosno linearna veza): realni brojevi a, b. Obično se traži da bude $a \neq 0$ (inače je funkcija konstanta, a graf pravac usporedan s x-osi).
Analitičko i geometrijsko značenje parametara a i b:
Analitički, $b = f(0)$ tj. b je vrijednost varijable y kad je vrijednost varijable x jednaka 0 (to se piše i kao $y(0) = b$).
Geometrijski, b je odrezak koji graf odsijeca na y-osi.
Analitički, a je stalni omjer prirasta funkcije i prirasta argumenta:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = a$$

Geometrijski, a je koeficijent smjera (nagib) pravca - grafa funkcije:
ako je $a > 0$ prikloni je kut pravca šiljast (jer je $a = \tan \alpha$), a funkcija rastuća (to znači da se pri povećavanju veličine x povećava i veličina y);
ako je $a < 0$ prikloni je kut pravca tup, a funkcija padajuća; (to znači da se pri povećavanju veličine x veličina y smanjuje) (sl.2.).



Mnoge su veze medju veličinama linearne, a tipični su primjeri pretvaranje jedinica i jednoliko gibanje po pravcu:

Primjer 1. Pretvaranje jedinica.
(i) Ako je y vrijednost mase u gramima, a x vrijednost iste mase u kilogramima,

onda je:

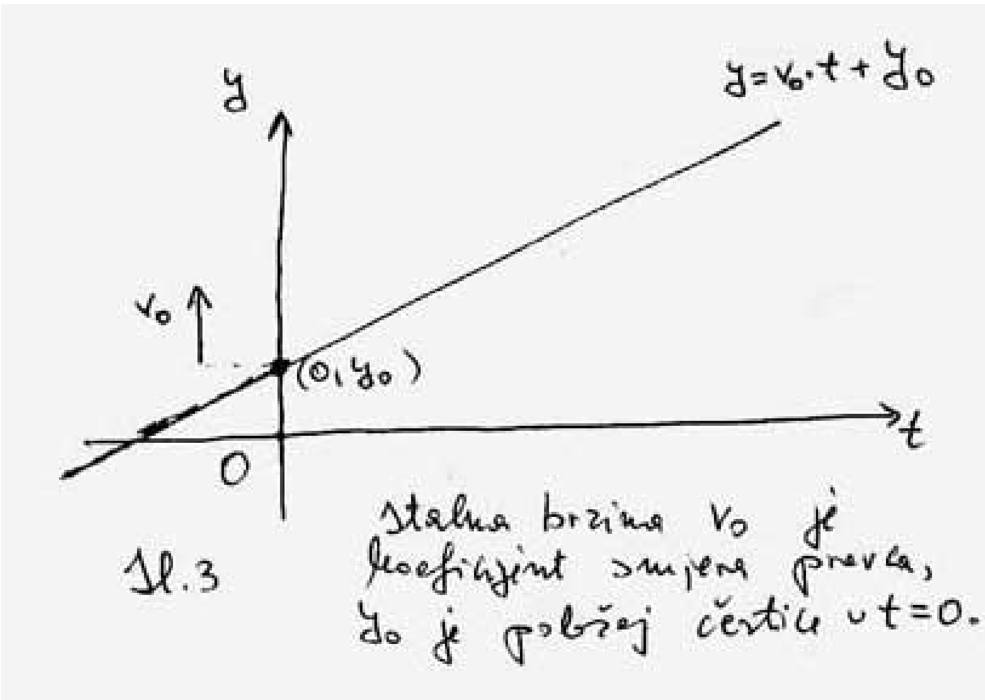
$$y = 1000x$$

Jezikom funkcija: Linearna funkcija $f(x) := 1000x$ "pretvara kilograme u grame".
(ii) ako je x vrijednost temperature u Celziusovim stupnjevima, a y vrijednost iste temperature u Fahrenheitovim stupnjevima, onda je $y = \frac{9}{5}x + 32$.
Jezikom funkcija: Linearna funkcija $f(x) := \frac{9}{5}x + 32$ "pretvara Celziusove stupnjeve u Fahrenheitove".

Primjer 2. Jednoliko gibanje po pravcu.
Ako je y koordinata položaja čestice koja se giba po pravcu jednolikom brzinom v_0, a koja u trenutku $t = 0$ zauzima položaj (tj. koordinatu) y_0, onda je

$$y = v_0 \cdot t + y_0$$

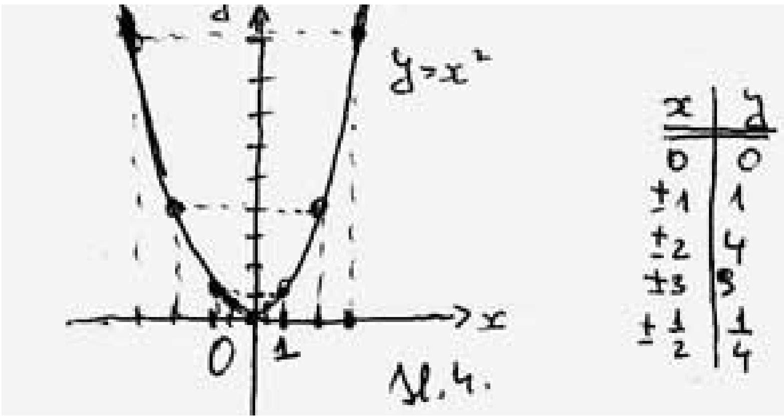
(tu je stalna brzina v_0 koeficijent smjera, a y_0 odrezak na y-osi)(sl.3.).



Jezikom funkcija: Linearna funkcija $f(t) := v_0 \cdot t + y_0$ opisuje položaj čestice koja se giba jednoliko po pravcu brzinom v_0, a koja u trenutku $t = 0$ ima položaj y_0.

Kvadratna funkcija. Potencije. Polinomi.

Funkcija $f(x) := x^2$ je funkcija kvadriranja tj. stavljanje na drugu potenciju (kraće kvadriranje ili druga potencija).
Njen je graf parabola s jednadžbom $y = x^2$ (sl.4.).



Sl.4.

To je primjer kvadratne veze, koja, na primjer, povezuje duljinu stranice kvadrata x i njegovu površinu y (tu y kvadratno ovisi o x).
Nešto složenija, a u primjenama, puno češća kvadratna veza jest ona oblika

$$y = ax^2$$

(s pripadnom funkcijom $f(x) := ax^2$), gdje je a realni parametar (u pravilu se traži da bude $a \neq 0$).

Primjer 3. Kvadratne veze oblika $y = ax^2$ su, na primjer:
(i) izmedju duljine stranice jednakostraničnog trokuta i njegove površine.
(ii) izmedju polumjera kruga i njegove površine.
(iii) izmedju proteklog vremena i duljine prijedjenog puta čestice koja se giba po pravcu pod utjecajem konstantne (stalne) sile, ako je u trenutku kad smo počeli mjeriti vrijeme brzina čestice bila nula (zašto je potreban ovaj posljednji uvjet?).

Opća kvadratna funkcija - polinom 2. stupnja. To je funkcija

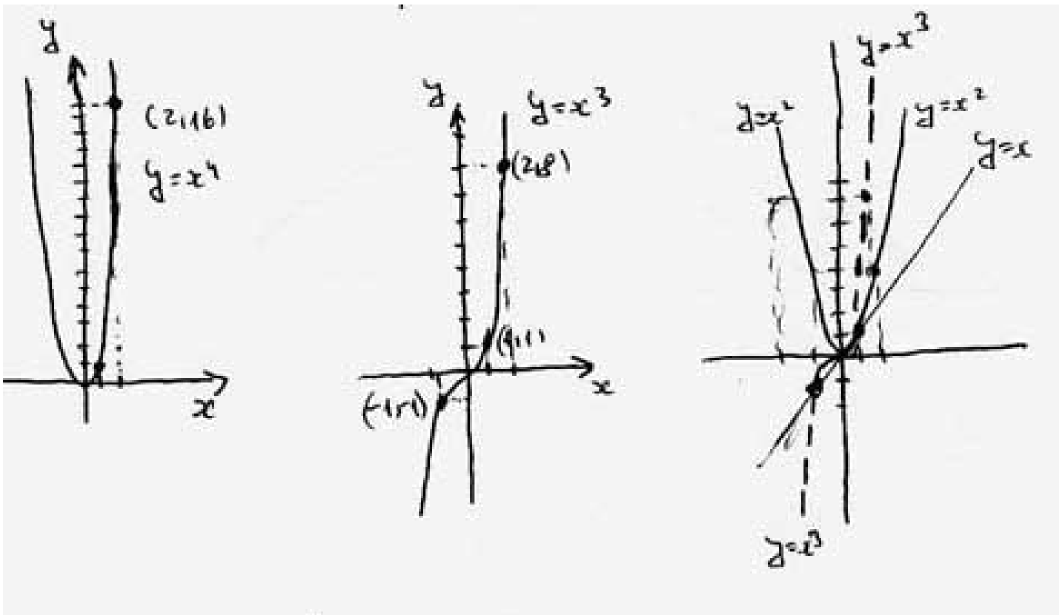
$$f(x) := ax^2 + bx + c$$

gdje su a, b, c realni parametri i $a \neq 0$. Graf joj je parabola s jednadžbom

$$y = ax^2 + bx + c$$

Ta se funkcija i graf podrobno obradjivala u srednjoj školi. Ima veliku ulogu u primjenama, na primjer gibanje na pravcu pod utjecajem stalne sile, poput vertikalno hitca. Općenito, ona opisuje veze izmeddju dviju veličina pri kojoj se pri promjeni jedne od veličina, brzina promjene druge mijenja linearno, odnosno ako je akceleracija promjene stalna. O tome će više biti riječi poslije.

Potencije oblika $f(x) := x^n$ odnosno $f(x) := ax^n$, gdje je n prirodan broj i a realan broj različit od nule predočene su na (sl.5.).



Sl. 5.

Inverzna funkcija i inverzna veza medju veličinama
1. Inverzna funkcija linearne funkcije opet je linearna funkcija.

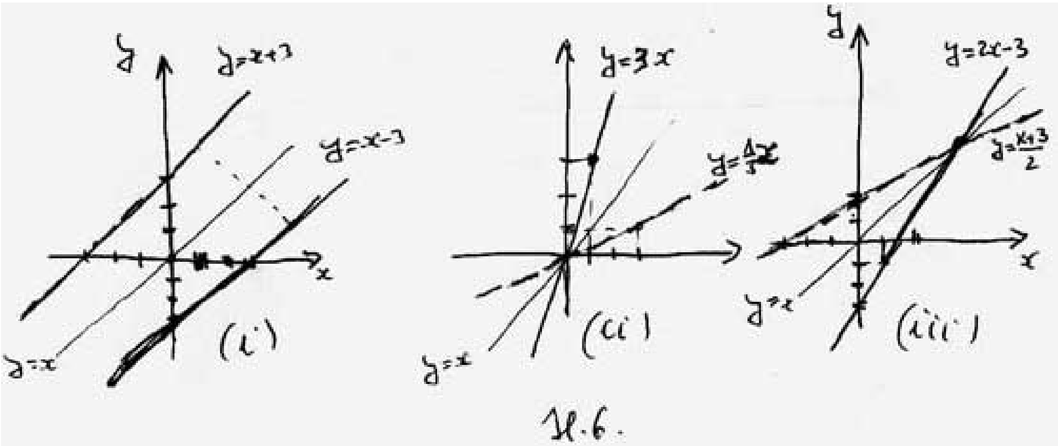
Linearna veza $y = ax + b$ medju veličinama x, y eksplicitno pokazuje kako x ovisi o y. Inverzna veza pokazuje kako y ovisi o x. Tu je $x = \frac{y-b}{a}$ tj. $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$.

Inverzna funkcija linearne funkcije $f(x) := ax + b$ je funkcija

$$f^{-1}(x) := \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

Uočite da se izraz za inverznu funkciju dobije tako da se u inverznoj vezi stavi x umjesto y. To treba tumačiti ovako:
Funkcija f najprije x množi s a, potom rezultatu dodaje b.
Inverzna funkcija f^{-1} vrši suprotnu (inverznu) radnju, u suprotnom redoslijedu.
Dakle:
Funkcija f^{-1} najprije od x oduzima b, potom rezultat dijeli s a.

Primjer 4. Ove su veze medjusobno inverzne (i u koordinatnoj ravnini su predočene istim pravcem). Za razliku od toga grafovi funkcije i njoj inverzne funkcije, predočeni u istom koordinatnom sustavu, simetrični su s obzirom na pravac s jednadžbom $y = x$ (sl.6.).



(i) $y = x - 3$ i $x = y + 3$. Na jeziku funkcija imamo:

$$f(x) := x - 3 : \ f^{-1}(x) = x + 3$$

s jednadžbama pripadnih grafova $y = x - 3$ i $y = x + 3$.
(ii) $y = 3x$ i $x = \frac{y}{3}$. Na jeziku funkcija imamo:

$$f(x) := 3x : \ f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$$

s jednadžbama pripadnih grafova $y = 3x$ i $y = \frac{x}{3}$.
(iii) $y = 2x - 3$ i $x = \frac{y+3}{2}$. Na jeziku funkcija imamo:

$$f(x) := 2x - 3 : \ f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

s jednadžbama pripadnih grafova $y = 2x - 3$ i $y = \frac{x+3}{2}$.

Inverzna funkcija kvadratne funkcije - funkcija "drugi korijen" Od prije je poznato da je "korjenovanje inverzno potenciranju" i oznake $\sqrt{\ }$ za drugi korijen, odnosno $\sqrt[n]{\ }$ za n-ti korijen.

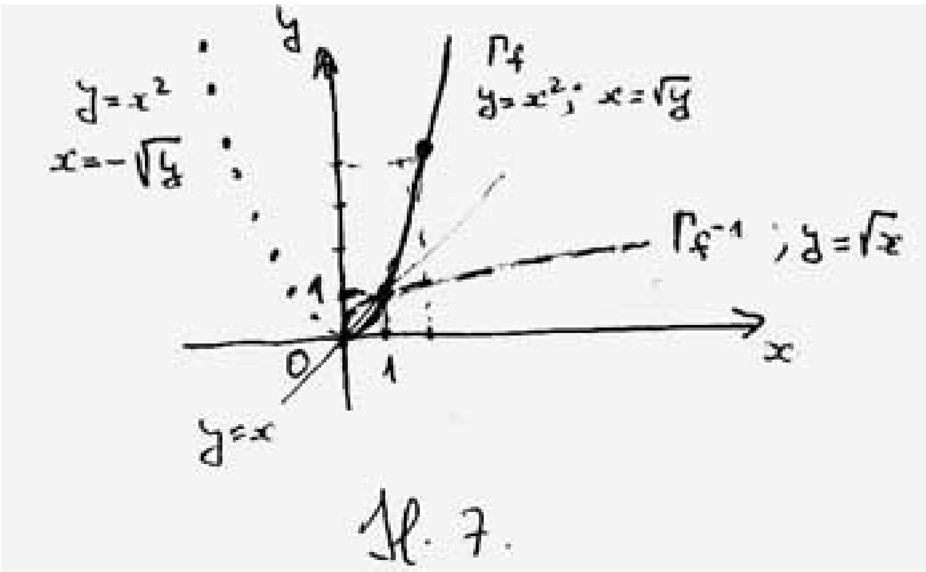
Ako je $y = x^2$ onda je, općenito, $x = \pm\sqrt{y}$. Za te su dvije veze ne govorimo da su medjusobno inverzne (već samo da su ekvivalentne). To je zato što u vezi $y = x^2$ dvije različite (medjusobno suprotne) vrijednosti veličine x odgovaraju istoj vrijednosti veličine y. Izuzetak je kad obje veličine imaju vrijednost 0. Medjutim, ako se ograničimo **samo na pozitivne** vrijednosti x, onda su

$$y = x^2 \ i \ x = \sqrt{y}$$

medjusobno inverzne veze. Tu smo $\pm$ izbacili jer je $x \geq 0$, a poznato je da su vrijednosti drugog korijena takodjer pozitivni (li nula). Zato su funkcije:

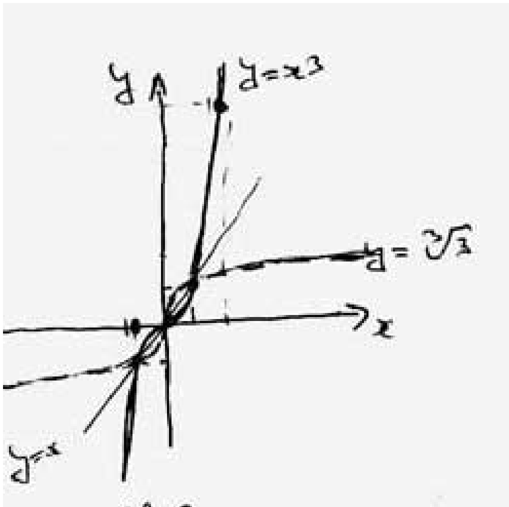
$$f(x) := x^2, \ x \geq 0 \ i \ f^{-1}(x) := \sqrt{x}$$

medjusobno inverzne i njihovi su grafovi simetrični s obzirom na pravac s jednadžbom $y = x$ (sl.7.).

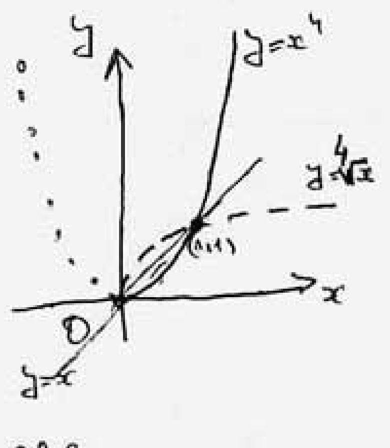


Sl. 7.

Slično:
$y = x^3$ i $x = \sqrt[3]{y}$ medjusobno su inverzne veze.
$f(x) := x^3$ i $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ medjusobno su inverzne funkcije (tu nema ograničenja na x). Tako je i za petu, sedmu i, općenito, neparnu potenciju (sl.8.).
$y = x^4$ za $x \geq 0$ i $x = \sqrt[4]{y}$ medjusobno su inverzne veze, odnosno $f(x) := x^4$ za $x \geq 4$ i $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$ medjusobno su inverzne funkcije. Tako je i za šestu, osmu i svaku parnu potenciju (sl.9.).



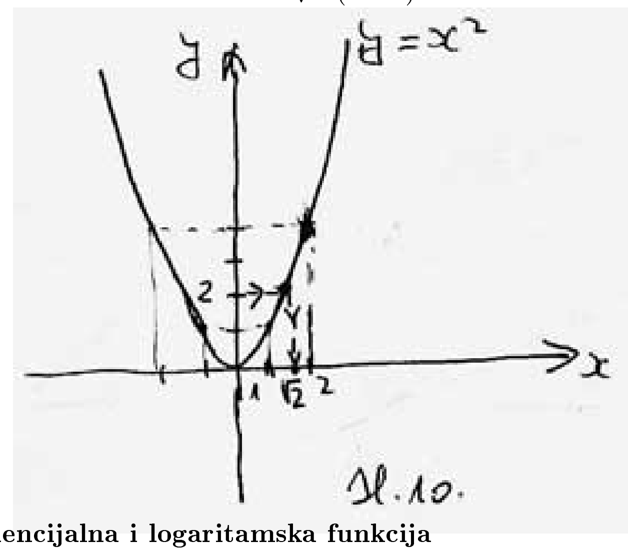
Sl. 8.



Sl. 9.

Primjer 5. Zadan je koordinatni sustav u koji je ucrtan graf kvadratne funkcije $f(x) := x^2$. Može li nam taj graf pomoći da grafički odredimo $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ i, općenito, $\sqrt{a}$ ako je poznat $a > 0$?

Može. Na primjer, $\sqrt{2}$ dobit ćemo tako da na y-osi iz 2 idemo usporedno s x-osi u pozitivnom usmjerenju do grafa, potom iz te točke okomito na x-os, koji ćemo presjeći u točki s koordinatom $\sqrt{2}$ (sl.10.).



Eksponencijalna i logaritamska funkcija

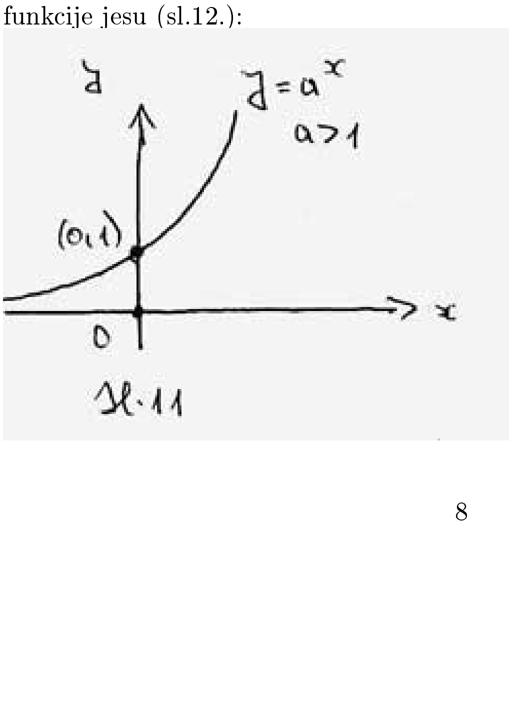
Ponovimo, ako je baza $a > 1$ onda eksponencijalna funkcija

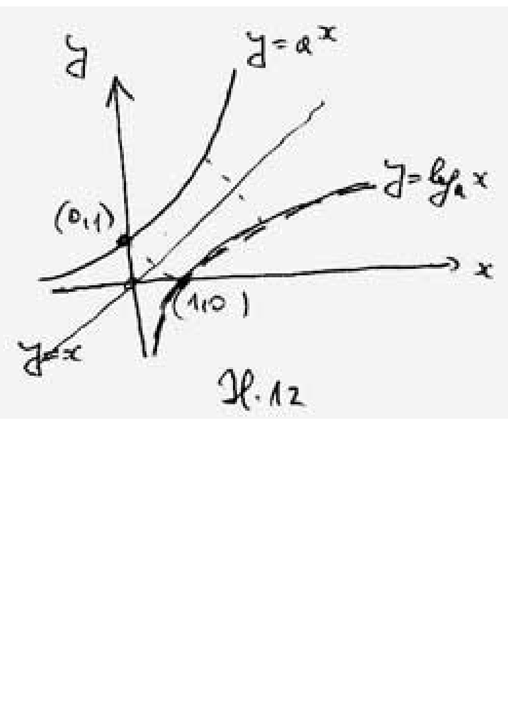
$$f(x) := a^x$$

ima ova svojstva (sl.11.):

1. f ubrzano raste
2. f je pozitivna (graf joj je iznad osi x)
3. f je definirana za svaki x, tj. a^x postoji za svaki x, tj. svaki pravac okomit na x-os siječe graf
4. $f(0) = 1$, jer je $a^0 = 1$; tj. točka $(0, 1)$ je točka grafa eksponencijalne funkcije.
5. $a^x > 1$ za $x > 0$, a $a^x < 1$ za $x < 0$

Inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $f(x) := a^x$ je logaritamska funkcija s bazom a, tj funkcija $f^{-1}(x) := log_a(x)$, a inverzna veza eksponencijalne veze $y = a^x$ jest veza $x = log_a(y)$.
Svojstva logaritamske funkcije, s bazom $a > 1$, inverzna onima eksponencijalne funkcije jesu (sl.12.):





1. log_a usporeno raste
2. log_a je definirana samo za $x > 0$ (graf joj je desno od osi y)
3. log_a postiže sve vrijednosti, tj. svaki pravac okomit na y-os siječe graf.
4. $f(1) = 0$, jer je $log_a(1) = 0$; tj. točka $(1, 0)$ je točka grafa logaritamske funkcije.
5. $log_a(x) > 0$ za $x > 1$ tj. graf je iznad x-os za $x > 1$.
$log_a(x) < 0$ za $0 < x < 1$ tj. graf je ispod x-osi za $0 < x < 1$.

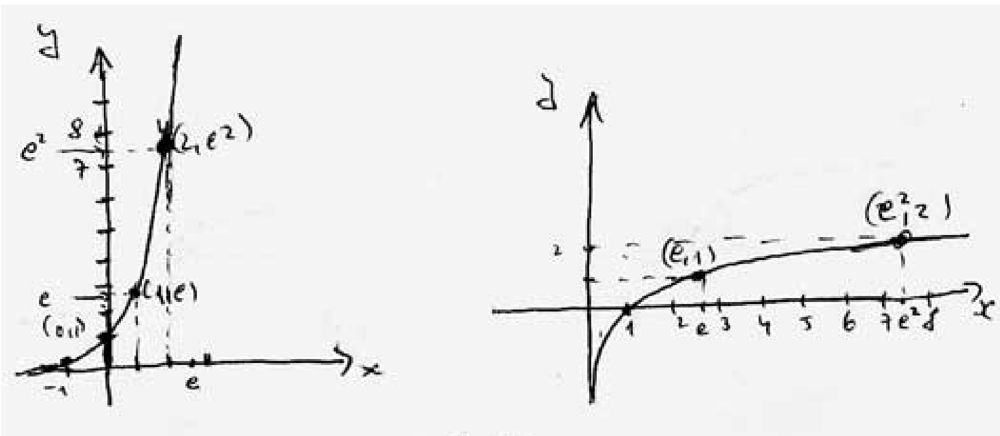
Primjer 6. (prirodni logaritam). U primjenama se prirodno javlja broj $e \approx 2.7$, koji je iracionalan (čak transcendentan). Logaritam s bazom e označava se obično kao ln. Dakle

$$ln := log_e$$

Eksponencijalna funkcija s bazom e obično se označava kao exp. Dakle

$$exp(x) := e^x$$

Na (sl.13.) su grafovi ovih funkcija s nekoliko istaknutih točaka.



sl. 13.

Takodjer, logaritamsku funkciju s bazom 10 obično pišemo bez baze, kao log. Dakle

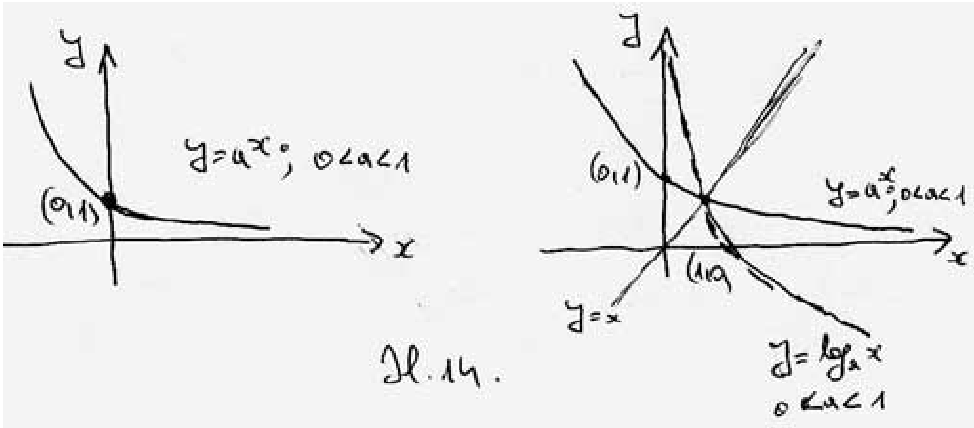
$$log := log_{10}$$

Eksponencijalna i logaritamska funkcija s bazom manjom od 1.

Eksponencijalne funkcije (odnosno logaritamske) dijele se u dvije skupine:

I. skupina. U njoj je baza $a > 1$. Te smo funkcije već razmatrali i jedno od svojstava tih funkcija da su **rastuće**.

II. skupina. U njoj je $0 < a < 1$. Te funkcije imaju svojstva analogna onima za $a > 1$, a **glavna** razlika je da su te funkcije **padajuće** (sl.14.).



Sl. 14.

Evo popisa svojstava tih funkcija.

Ako je $f(x) := a^x$ i $0 < a < 1$ onda:
1. f usporeno pada
2. f je pozitivna (graf joj je iznad osi x)
3. f je definirana za svaki x, tj. a^x postoji za svaki x, tj. svaki pravac okomit na x-os siječe graf
4. $f(0) = 1$, jer je $a^0 = 1$; tj. točka $(0, 1)$ je točka grafa eksponencijalne funkcije.
5. $a^x < 1$ za $x > 0$, a $a^x > 1$ za $x < 0$

Funkcija log_a za $0 < a < 1$ ima ova svojstva:
1. log_a usporeno pada
2. log_a je definirana samo za $x > 0$ (graf joj je desno od osi y)
3. log_a postiže sve vrijednosti, tj. svaki pravac okomit na y-os siječe graf.
4. $f(1) = 0$, jer je $log_a(1) = 0$; tj. točka $(1, 0)$ je točka grafa logaritamske funkcije.
5. $log_a(x) > 0$ za $0 < x < 1$ tj. graf je iznad x-os za $0 < x < 1$.
$log_a(x) < 0$ za $x > 1$ tj. graf je ispod x-osi za $x > 1$.

Važna svojstva koja imaju sve eksponencijalne funkcije i njima analogna svojstva logaritamskih funkcija.

(I) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (zbroj prelazi u umnožak)
$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$ (umnožak prelazi u zbroj)

$a^{x-y} = a^x : a^y$ (razlika prelazi u količnik)
$log_a(x : y) = log_a(x) - log_a(y)$ (količnik) prelazi u razliku)

(II) $(a^x)^y = a^{xy}$ (potenciranje prelazi u množenje).
$log_a(x^y = ylog_a(x)$ (potenciranje prelazi u množenje).

Važna svojstva koja povezuju eksponencijalnu i logaritamsku funkciju s jednakim bazama - par medjusobno inverznih funkcija.

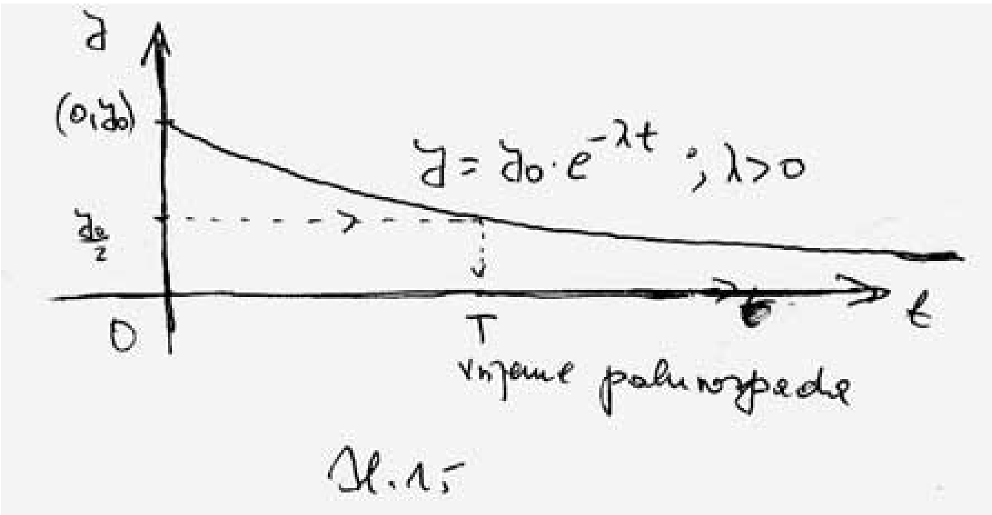
$log_a(a^x) = x$ za svaki realan broj x.
$a^{log_a(x)} = x$ za svaki pozitivan broj x (tj. za $x > 0$).

Primjer 7. (primjer eksponencijalne zavisnosti

Naka je t vrijeme i y količina radioaktivne materije. Tada su te dvije veličine exsponencijalno zavisne (u idealnim uvjetima):

$$y = y_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Tu je y_0 količina materije u $t = 0$, a $\lambda > 0$ konstanta ovisna o vrsti materije (može se i preciznije definirati) (sl.15). Ovaj ćemo važan primjer podrobnije razmatrati kad budemo obradjivali diferencijalne jednadžbe.



Inverzne funkcije i rješavanje jednadžba.

Ako f ima inverznu funkciju onda je rješenje jednadžbe

$$f(x) = b$$

$$x = f^{-1}(b)$$

(uz uvjet da $f^{-1}(b)$ postoji).
Dakle, takve jednadžbe imaju točno jedno rješenje ili nemaju rješenja.

Primjer 8.
1. Jednadžba: $x - 2 = 3$ —– Rješenje: $x = 3 + 2$
2. Jednadžba: $2 \cdot x = 3$ —– Rješenje: $x = 3 : 2$
3. Jednadžba: $x : 2 = 3$ —– Rješenje: $x = 3 \cdot 2$
4. Jednadžba: $x^2 = 3$ —– Rješenje: $x = \pm\sqrt{2}$
(predznak se pojavljuje jer su kvadriranje i korjenovanje inverzne samo za pozitivne brojeve).
5. Jednadžba: $2^x = 3$ —– Rješenje: $x = log_2(3)$

6. Jednadžba: $log_2(x) = 3$ —– Rješenje: $x = 2^3$

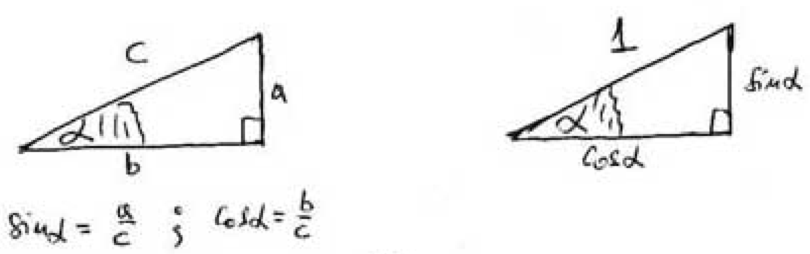
7. Jednadžba: $2^x = -3$ —– Rješenje: Nema ga jer $log_2(-3)$ ne postoji
8. Jednadžba: $x^2 = -3$ —– Rješenje: Nema realnih rješenja jer $\sqrt{-3}$ nije realan broj

9. Jednadžba: $x^3 = -2$ —– Rješenje: $x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$.
10. Jednadžba: $log_2(x) = -3$ —– Rješenje: $x = 2^{-3}$

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

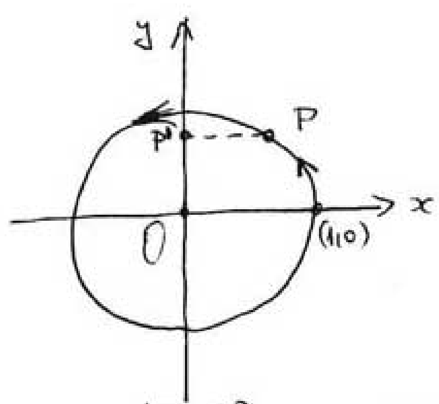
Trigonometrijske funkcije i arkus funkcije

Trigonometrijske funkcije obradjuju se u srednjoj školi; s njihovim inverzima - arkus funkcijama susrećemo se prvi put.
Vidjeli smo da su linearne veze vrlo česte (na primjer vrijeme i položaj čestice koja se giba jednoliko po pravcu), kvadratne takodjer (na primjer, vrijeme i položaj čestice pri slobodnom padu); eksponencijalne veze dobro opisuju radioaktivni raspad itd. Trigonometrijske funkcije opisuju periodna gibanja (titranja, valovi) i to je jedna od njihovih najvažnijih uloga.
Temelj za te funkcije jest poznavanje odnosa izmedju kuta i stranica pravokutnog trokuta, posebice onog s hipotenuzom duljine 1 (sl.16.).



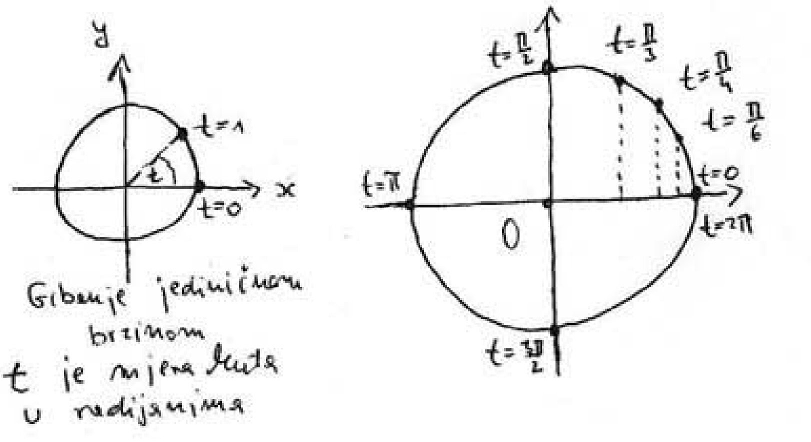
Sl. 16

Primjer 9. Zamislimo da se čestica jednoliko giba po jediničnoj kružnici, suprotno od kazaljke na satu, jediničnom brzinom. Postavimo tu kružnicu u koordinatni sustav. Treba opisati položaj projekcije te točke na y-osi ovisno o vremenu t (sl.17.).



Sl. 17

Vidimo da projekcija P' točke P titra po y-osi izmedju točaka $(0,-1)$ i $(0,1)$, dok P kruži.
Položaj u nekom vremenu t ovisi o položaju u $t=0$, zato, kao najjednostavniju mogućnost, razmotrimo onu ako je početni položaj u točki $(1,0)$ (dakle na x-osi) (sl.18.).



t	y
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

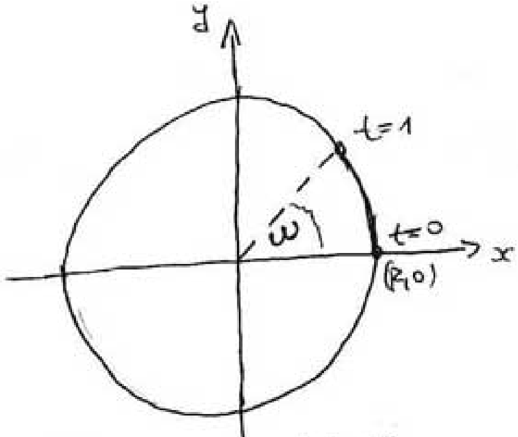
Sl. 18.

Kako je brzina jedinična, a opseg kružnice 2π, jedan okret traje 2π vremenskih jedinica (pola okreta π vremenskih jedinica, četvrtina okreta $\frac{\pi}{2}$ vremenskih jedinica itd.), položaj y povezan je s vremenom sinusnom vezom:

$$y = \sin t$$

To vidimo i iz tablice.

Primjer 10. Zamislimo sad da se čestica jednoliko giba po kružnici polumjera R, suprotno od kazaljke na satu, kutnom brzinom ω u **radijanima** (to znači da čestica u jedinici vremena prebriše središnji kut ω) (sl.19).



Sl. 19

Postavimo tu kružnicu u koordinatni sustav. Treba opisati:
(i) položaj projekcije te točke na y-osi ovisno o vremenu t.
(ii) položaj projekcije te točke na x-osi ovisno o vremenu t.

(i) položaj te točke u koordinatnom sustavu ovisno o vremenu t.

Položaj ovisi o položaju u $t = 0$, zato, kao najjednostavniju mogućnost, razmotrimo onu ako je početni položaj u točki $(R, 0)$ (dakle na x-osi).
Kako je kutna brzina ω, za t vremenskih brzina prebriše se kut ωt, pa vrijedi (sl.20.):
(i)

$$y = R\sin(\omega t)$$

(ii)

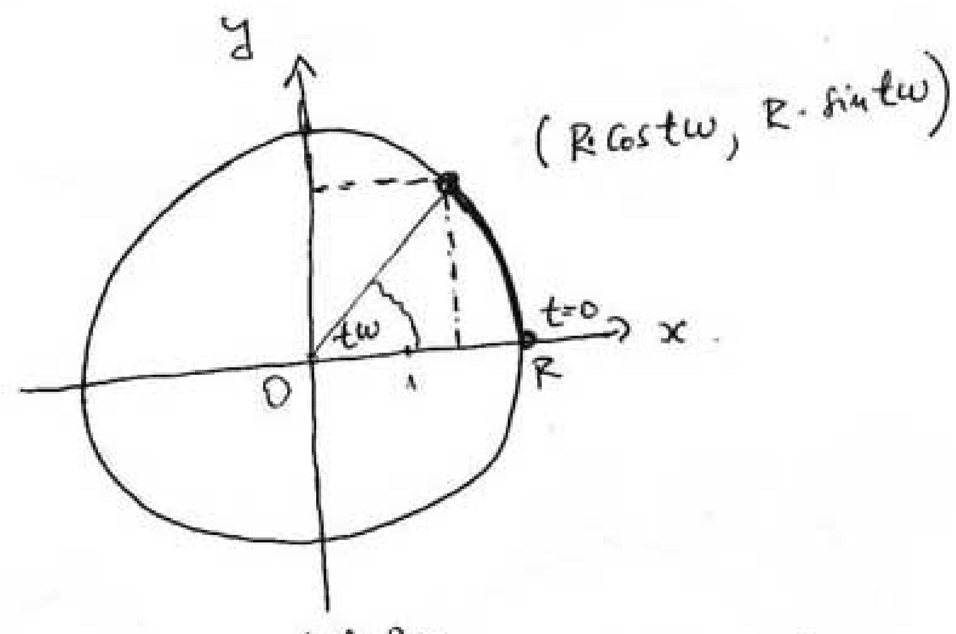
$$x = R\sin(\omega t)$$

(iii)

$$(x, y) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)$$

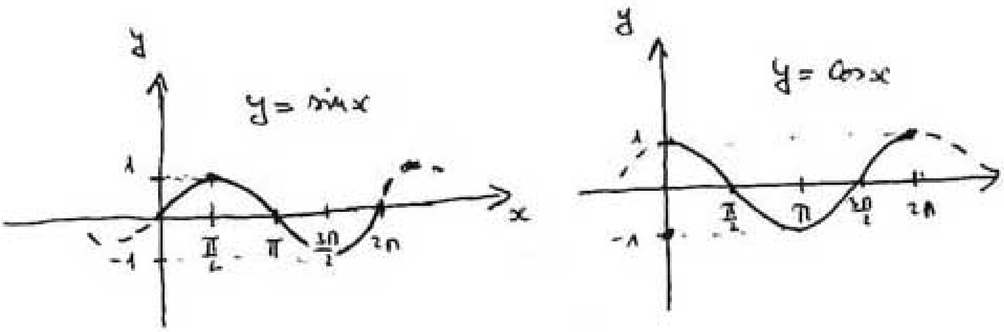
Posebice, ako je $R = 1$ i $\omega = 1$ duljinskih jedinica za jednu vremensku, onda je

$$(x, y) = (\cos t, \sin t)$$



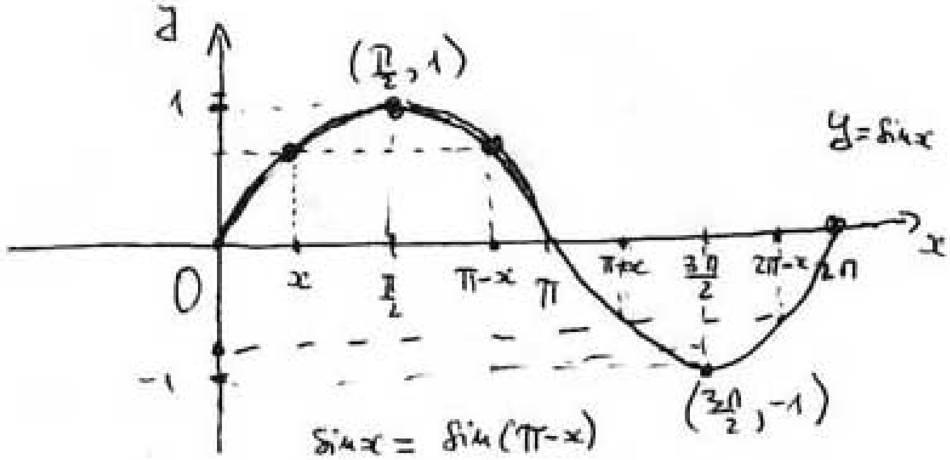
Sl. 20
Položaj čestice nakon $\underset{\sim}{t}$ vremenskih jedinica

Kad crtamo grafove pripadnih funkcija sinus i kosinus, onda, obično, ne pišemo t, već x, a drugu koordinatu, prema običaju označavamo kao y. Dakle, imamo funkcije sin i cos i njihove grafove $y = \sin x$ i $y = \cos x$ (sl. 21.).

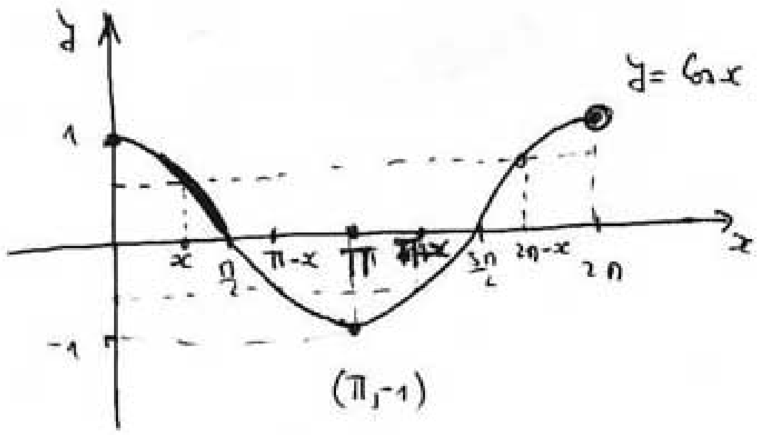


Sl. 21

Primjer 11. (S) Uočimo ponašanje funkcije sinus na intervalu $[0, 2\pi >$ (sl.22).
(i) Na tom intervalu sinus svaku **pozitivnu** vrijednost iz intervala $< -1, 1 >$ postigne točno dva puta: jednom u nekom x, a drugi put u $\pi - x$. Pripadna negativna vrijednost, postiže se u $\pi + x$ i $2\pi - x$. Broj 1 postiže se jednom - u $x = \frac{\pi}{2}$, broj -1 takodjer, u $x = \frac{3\pi}{2}$
(ii) Sinus, po četvrtinama, najprije usporeno raste, pa ubrzano pada, pa usporeno pada, pa ubrzano raste.
Na intervalu $[\pi, 2\pi >$ sinus se opet ponaša kao i na $[0, 2\pi >$ itd. (**periodnost** s periodom 2π).
(C) Slično je za funkciju kosinus (sl.23).

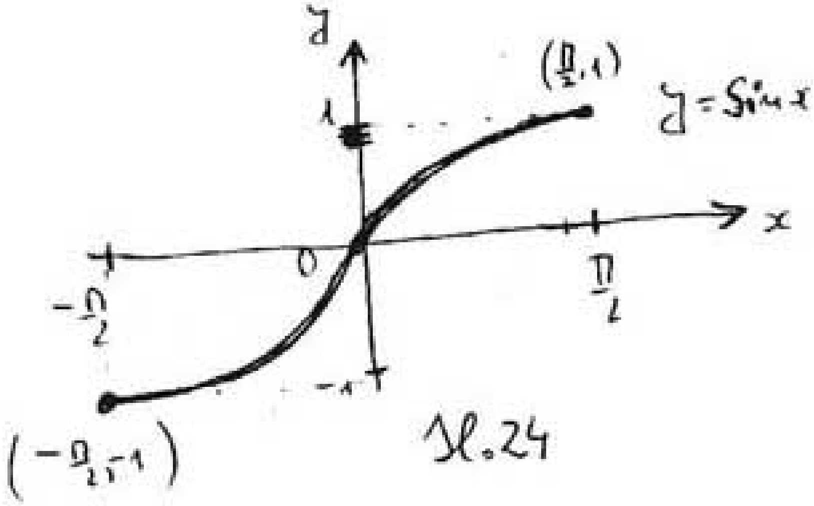


Sl.22.



sl.23.

Primjer 12. Uočimo ovo svojstva funkcija sinus:
(S) Na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ funkcija sin postiže **svaku** vrijednost iz intervala $[-1, 1]$ **točno** jedan put (sl.24.).



sl.24

To znači da je na tom intervalu sinus injektivna funkcija i da ima inverznu funkciju: oznaka Sin^{-1} ili $Arcsin$ (čitamo *arkus sinus*). Veliko S u Sin upozorava nas da ne gledamo funkciju za sve x, već samo za $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Dakle:

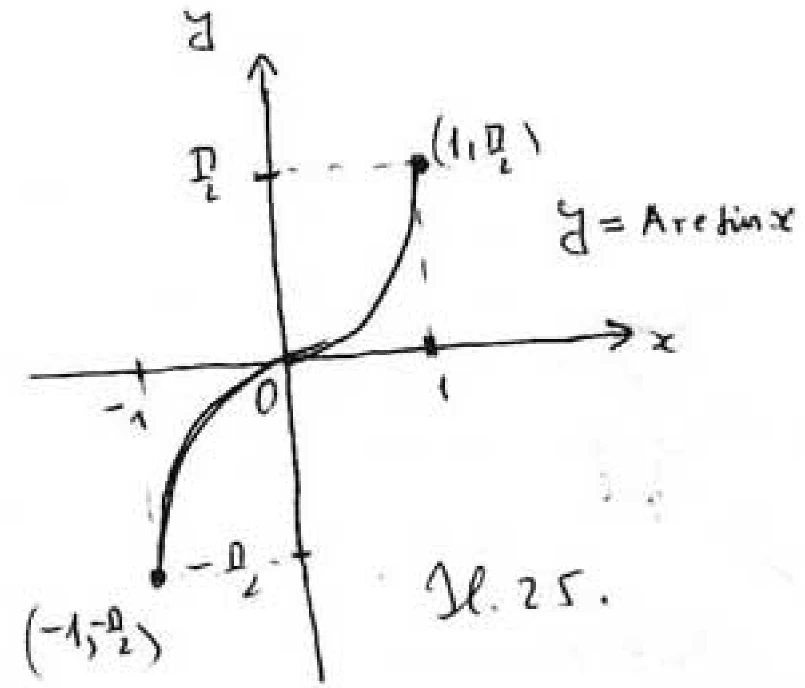
$$Sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

$$Sin^{-1} = Arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Osnovne formule koja povezuju sinus i arkussinus (kao medjusobno inverzne funkcije):

(I) $sin(Arcsin(x)) = x$ za sve $x \in [-1, 1]$
(II) $Arcsin(sin(x)) = x$ za sve $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Graf funkcija $Arcsin$ (sl. 25.) i sinus (za $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) simetrični su s obzirom na pravac $y = x$ (ali nije ih zgodno crtati skupa).

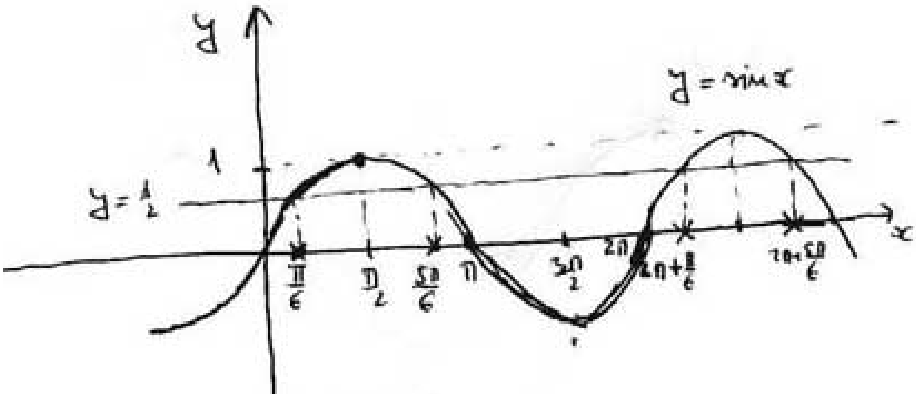


Primjer 13. Odredimo $Arcsin(1)$, $Arcsin(-1)$, $Arcsin\frac{1}{2}$, $Arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$Arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, jer je $sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$Arcsin(-1) = -1$, jer je $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$
$Arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6})$, jer je $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
$Arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$, jer je $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Primjer 14. Rješavanje trigonometrijskih jednadžba.
Riješimo jednadžbu $\sin(x) = \frac{1}{2}$
(a) na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tj. za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
(b) na intervalu $[0, 2\pi]$
(c) u skupu realnih brojeva (sva rješenja).

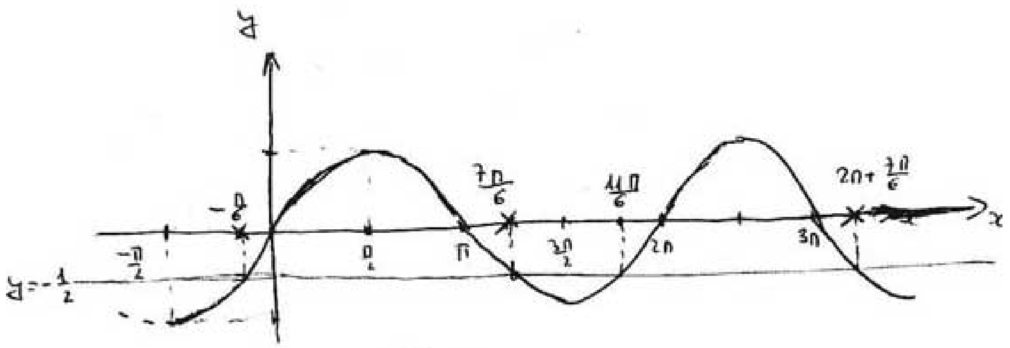
Kad riješimo a), onda ćemo lako riješiti i b) i c).
Rješenje u a) je jedinstveno: $x_0 = Arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$
U b) ima dva rješenja: $x_1 = x_0 = \frac{\pi}{6}$ (iz a)) i $x_2 = \pi - x_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
U c) su dvije beskonačne serije rješenja, a dobiju se dodavanjem $2k\pi$ svakom od rješenja iz b).
I. serija: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
II.serija: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
To je zbog periodnosti. Tu k prolazi skupom cijelih brojeva: $0, \pm 2, \pm 3, ...$
Geometrijska ilustracija rješenja je na sl.26.



Sl. 26.

Primjer 15. Rješavanje trigonometrijskih jednadžba - nastavak.
Riješimo jednadžbu $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
(a) na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tj. za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
(b) na intervalu $[0, 2\pi]$
(c) u skupu realnih brojeva (sva rješenja).

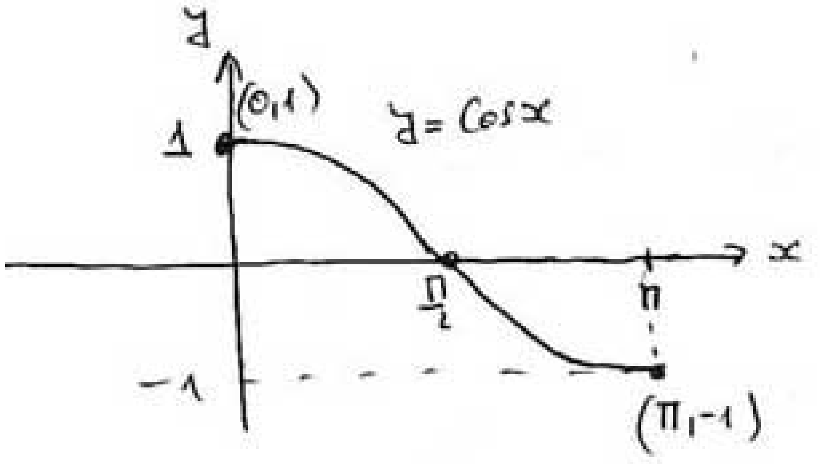
Postupamo kao i u Primjeru 14. Postoji mala razlika u postupku (zbog negativnog predznaka).
Rješenje u a) opet je jedinstveno: $x_0 = Arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$
(napominjemo da je, zbog neparnosti, dovoljno znati računati arkussinus za pozitivne brojeve).
U b) ima dva rješenja: $x_1 = \pi - x_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ i $x_2 = 2\pi + x_0 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$
U c) je kao i u Primjeru 14.: I. serija: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$
II.serija: $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$
Geometrijska ilustracija rješenja je na sl.27.



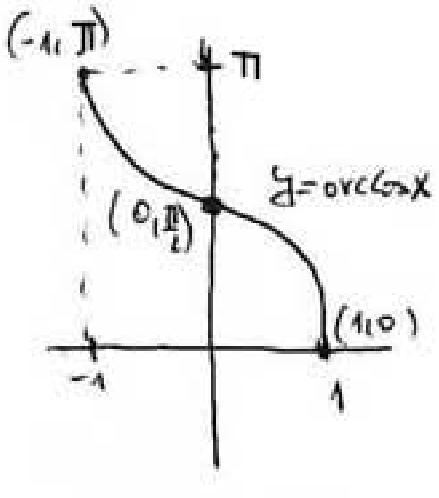
Sl. 27

Za rješavanje jednadžbe $\cos(x) = b$, postupa se slično kao sa sinusom. Prvo, uvodi se inverzna funkcija $Arccos$ ovako:

1. Vidimo da cos na intervalu $[0, \pi]$ postiže svaku vrijednost iz $[-1, 1]$ (sl.28.), pa ima inverznu funkciju *arccos* (sl.29).



sl. 28.



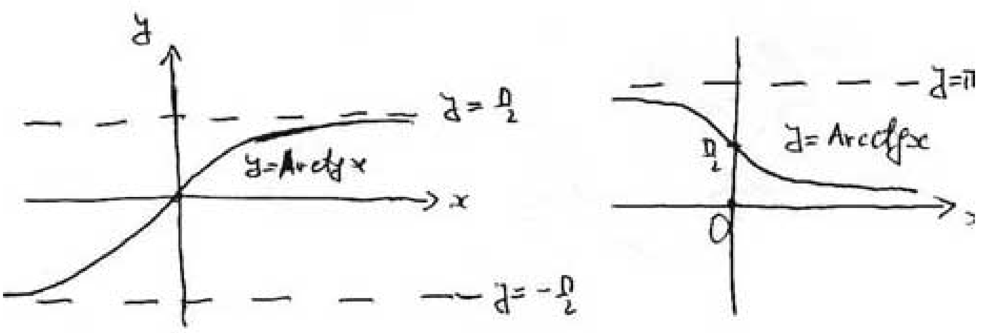
sl. 29.

2. Postupamo kao kod sinusa, dakle:
$Cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$
$Arccos := Cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
Vrijedi (veza izmedju dviju medjusobno inverznih funkcija):
$Arccos(cos(x)) = x$ za sve $x \in [0, \pi]$
$cos(Arccos(x)) = x$ za sve $x \in [-1, 1]$

Primjer 16. Riješimo jednadžbu $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

1.korak (rješenje na intervalu $[0, \pi]$):
$x_0 = Arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$
2. korak (skup svih rješenja): $x = \pm x_0 + 2k\pi = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
(tu smo iskoristili parnost funkcije kosinus pa nismo morali tražiti drugo rješenje na intervalu $[0, 2\pi]$; inače, to je rje šenja: $2\pi - x_0 = \frac{5\pi}{3}$).

Funkcije $Arctg$ i $Arcctg$ uvodimo slikom 30.



Sl. 30.

V. Pitanja i zadaci

1. Nadjite što više primjera linearne veze medju veličinama u matematici, fizici, kemiji i sl.

2. Opišite graf funkcije $f(x) = ax^2$. Navedite koja svojstva ovise o parametru a, a koja ne ovise.

3. Opišite graf kvadratne funkcije ovisno o parametrima.

4. (i) Usporedite svojstva eksponencijalnih funkcija s bazom većom od 1 odnosno manjom od 1. Koja su svojstva zajednička, a koja različita i kako?
(i) Usporedite svojstva logaritamskih funkcija s bazom većom od 1 odnosno manjom od 1. Koja su svojstva zajednička, a koja različita i kako?

5. (i) Napišite formulu koja povezuje eksponencijalne funkcije s različitim bazama (tj. a^x pomoću baze b). Posebno, zapišite a^x pomoću baze e.
(i) Napišite formulu koja povezuje logaritamske funkcije s različitim bazama. Posebno, zapišite $log_a(x)$ pomoču ln, odnosno log.

6. U Primjeru 8. za svaku jednadžbu zapišite f, f^{-1} i b.

7. Grafički riješite jednadžbe iz Primjera 8. Obrazložite zašto neke nemaju rješenja.

8. Usporedite grafove funkcija Sin i $Arcsin$.

9. Riješite jednadžbe $\sin(x) = 0$, $\sin(x) = 1$ i $\sin(x) = -1$ prema uzoru na Primjere 14. i 15. Uočite sličnosti i razlike. Interpretirajte i geometrijski.

10. Riješite jednadžbe $\cos(x) = 0$, $\cos(x) = 1$ i $\cos(x) = -1$ prema uzoru na Primjer 16. Uočite sličnosti i razlike. Interpretirajte i geometrijski.